Lista 4 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2023

Notação: nesta lista usaremos a convenção do Wald para os símbolos de Christoffel e curvatura, isto é, ${\Gamma^c}_{ab} = \frac{1}{2}\, g^{ck}\,(\partial_a g_{bk} + \partial_b g_{ak} - \partial_k g_{ab})$ e $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\,\omega_c = {R_{abc}}^d \omega_d$. Ainda, $R_{ac} = {R_{abc}}^b$ e $R = {R_a}^a$.

1. Considere um tensor A_{ijkl}, em um espaço vetorial V de dimensão n, com as seguintes simetrias:

   (i) $A_{ijkl} = -A_{jikl}$,

   (ii) $A_{ijkl} = -A_{ijlk}$,

   (iii) $A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0$.

   (a) Mostre que $A_{ijkl} = A_{klij}$.

   (b) Mostre que se $A_{ijkl} x^i y^j x^k y^l = 0$ para todos os vetores x^i, y^i de V, então $A_{ijkl} = 0$.

   (c) Mostre que o conjunto dos tensores que satisfazem as propriedades (i), (ii) e (iii) é um espaço vetorial de dimensão $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

   (d) Mostre que dado um tensor simétrico B_{ij}, o tensor $C_{ijkl} = B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk}$ tem as mesmas simetrias que A_{ijkl}.

   (e) Se g_{ij} é uma métrica em V e $n = 2$, então $A_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ para algum $K \in \mathbb{R}$.

   (f) Como aplicação do item anterior, considere agora uma variedade (pseudo-)riemanniana M de dimensão 2, com métrica g_{ij} e conexão de Levi-Civita. Mostre que o tensor de curvatura de M é então dado por $R_{ijkl} = \frac{R}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, onde R é o escalar de curvatura.[1]

2. Faz diferença se substituirmos a derivada covariante pela derivada simples nas definições dos tensores A_{ab} e C_{abc} abaixo?

   (a) $A_{ab} := \nabla_a V_b - \nabla_b V_a$

   (b) $C_{abc} := \nabla_a B_{bc} + \nabla_b B_{ca} + \nabla_c B_{ab}$, onde B_{ab} é tensor antissimétrico.

3. Mostre as seguintes identidades relacionadas às derivadas do tensor de Riemann ${R_{abc}}^d$:

   (a) $\nabla_a {R_{bcd}}^e + \nabla_b {R_{cad}}^e + \nabla_c {R_{abd}}^e$ (identidade de Bianchi);

[1] Como a curvatura escalar em duas dimensões é dada por $2K$, onde K é a curvatura gaussiana, temos equivalentemente $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$.

(b) $\nabla_b R_a{}^b = \frac{1}{2}\nabla_a R$.

4. Suponha que ξ^a é um vetor de Killing em uma variedade M.

   (a) Mostre que $\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d$;

   (b) Mostre que $\xi^a \nabla_a R = 0$.

   (c) Mostre que os valores de ξ^a e $\nabla_a \xi_b$ em um dado ponto $p \in M$ determinam ξ^a em toda a variedade M. Dica: as EDPs do item (a) são equivalentes ao sistema de EDPs dado por $\nabla_b \xi_c = L_{bc}$, $\nabla_a L_{bc} = -R_{bca}{}^d \xi_d$, que por sua vez é equivalente a termos $v^b \nabla_b \xi_c = v^b L_{bc}$, $v^a \nabla_a L_{bc} = -v^a R_{bca}{}^d \xi_d$ para todo v^a. Mas isso define um sistema de EDOs já que $v^a \nabla_a$ pode ser pensado como o operador D/dt ao longo de uma curva com vetor tangente v^a.

   (d) Mostre que o número máximo de vetores de Killing em uma variedade de dimensão n é dado por $n(n+1)/2$.

5. Liste todos os vetores de Killing do espaço de Minkowski.

6. Na lista 3 encontramos uma parametrização $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ para o toro como subvariedade de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calcule a curvatura escalar R para este caso e pinte o toro de cor vermelha na região onde $R > 0$ e azul na região onde $R < 0$.

   (b) Foi mostrado na lista 3 que as curvas correspondentes a $\phi = \phi_0$ da parametrização $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ são geodésicas. Tome duas dessas curvas, com valores de ϕ_0 próximos entre si, e calcule a aceleração relativa entre elas no espaço ambiente $\mathbb{R}^3$. Compare seu resultado com a equação do desvio geodésico.

   (c) Encontre todos os vetores de Killing deste toro. Dica: pode ser interessante começar sua busca descartando todos os vetores ξ^a que não satisfazem o item 2 do exercício 4.

7. Considere uma conexão arbitrária em uma variedade M (não necessariamente a de Levi-Civita). Definimos em aula os tensores de curvatura $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ e torção $T^\gamma{}_{\alpha\beta}$ via suas componentes em uma base coordenada: $\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\delta = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta V^c$ e $T^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}$. Mostre que os operadores associados agindo em campos de vetores, $R(X,Y)Z = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \partial_\delta$ e $T(X,Y) = T^\gamma{}_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \partial_\gamma$, são então dados por $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ e $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.

8. Mostre que o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita de uma variedade (pesudo)-riemanniana M é nulo se, e somente se, existem coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em M em que a métrica de M é dada por $ds^2 = -(dx^1)^2 - \cdots - (dx^k)^2 + (dx^{k+1})^2 + \cdots + (dx^n)^2$. Dica: tome

uma base ortonormal de T_pM em um ponto fixado $p \in M$ e estenda tais vetores a campos vetoriais por transporte paralelo (o que não deve depender do caminho se a curvatura é nula). Com isso, esses campos vetoriais têm derivadas covariantes nulas em todas as direções. Como a torção é nula, isso significa que tais vetores comutam entre si. O exercício 7 da lista 3 pode então ser usado para construir as coordenadas desejadas.

9. Considere um espaço-tempo com métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi^2.$$

Encontre as equações das geodésicas e mostre que os coeficientes de conexão não triviais neste caso são dados por:

$$\begin{array}{lll} {\Gamma^0}_{01} = f'/2f, & {\Gamma^1}_{00} = f'/2h, & {\Gamma^1}_{11} = h'/2h, \\ {\Gamma^1}_{22} = -r/h, & {\Gamma^1}_{33} = -(r\sin^2\theta)/h, & {\Gamma^2}_{12} = 1/r, \\ {\Gamma^2}_{33} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, & {\Gamma^3}_{13} = 1/r, & {\Gamma^3}_{23} = \cot\theta, \end{array}$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$.

10. Calcule todos as componentes não triviais do tensor de Riemann para o espaço-tempo do exemplo anterior. Mostre que as componentes não triviais do tensor de Ricci são dadas por:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \tfrac{f''}{2h} - \tfrac{f'}{4h}\left(\tfrac{f'}{f} + \tfrac{h'}{h}\right) + \tfrac{f'}{rh}, \\ R_{11} &= -\tfrac{f''}{2f} + \tfrac{f'}{4f}\left(\tfrac{f'}{f} + \tfrac{h'}{h}\right) + \tfrac{h'}{rh}, \\ R_{22} &= 1 - \tfrac{1}{h} - \tfrac{r}{2h}\left(\tfrac{f'}{f} - \tfrac{h'}{h}\right), \\ R_{33} &= \operatorname{sen}^2\theta\, R_{22}. \end{aligned}$$